

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 24.02.2017
CLASA a IX-a

Subiectul I.(7 puncte)

Fie triunghiul ABC și punctele M, N, P pe segmentele $[AB], [BC]$ și respectiv $[AC]$ astfel încât

$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}. \text{ Dacă } E, F \text{ și } R \text{ sunt punctele de intersecție ale segmentelor ce unesc mijloacele laturilor}$$

opuse ale patrulaterelor $AMNC, ABNP, BCPM$, să se arate că pentru orice punct O din plan are loc relația :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OR}), \text{ unde } G \text{ este centrul de greutate al triunghiului } MNP.$$

prof. Camelia Maria Magdaș, Colegiul Național "Andrei Mureșanu" Dej

Subiectul II. (7 puncte)

Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3} - \sqrt{1 \cdot 4}} + \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 5} - \sqrt{3 \cdot 6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)} - \sqrt{(2n-1)(2n+2)}}, n \in N^*.$$

a) Să se demonstreze că: $n(n+1) < a_n < (n+1)^2$, $\forall n \in N^*$.

b) Să se calculeze $[\sqrt{a_n}]$, (prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a).

prof. Nicolae Alb, Liceul Teoretic "Octavian Goga" Huedin

Subiectul III. (7 puncte)

Să se determine $n \in N^*$ astfel încât : $\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{1 + \sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = 1035$.

prof. Teodor Poenaru, Cluj

Subiectul IV. (7 puncte)

Dacă $x_i \in [1, 5]$, $i = \overline{1, 2016}$, să se arate că au loc inegalitățile: $2016^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{2016} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{2016} \frac{1}{x_i} \right) \leq \frac{9}{5} \cdot 2016^2$.

În ce condiții au loc egalitățile ?

prof. Gheorghe Lobonț, Colegiul Național „Emil Racoviță” Cluj-Napoca